

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الاستدراكية 2011  
الموضوع

9	المعامل	RS24	الرياضيات	المادة
4	عدد التمارين		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (أ) أو المادة

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون للموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالثنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(2.5 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(4 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(4 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

لكل  $x$  و  $y$  من المجال  $I = ]0,1[$  نضع:

$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

(أ) بين أن  $*$  قانون تركيب داخلي في  $I$ .

(ب) بين أن القانون  $*$  تبادلي وجمعي.

(ج) بين أن  $(I, *)$  يقول ضمنا محايدا يتم تحديده.

2- بين أن  $(I, *)$  زمرة تبادلية.

3- نعتبر المجموعتين  $K = \left\{ \frac{1}{1+2^n} / n \in \mathbb{Z} \right\}$  و  $H = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$

(أ) بين أن  $H$  زمرة جزئية للزمرة  $(\mathbb{R}^+, \times)$

(ب) نعتبر التطبيق:  $\varphi: H \rightarrow I$   
 $x \mapsto \frac{1}{1+x}$   
بين أن  $\varphi$  تشكل من  $(H, \times)$  نمو  $(I, *)$

(ج) استنتج أن  $K$  زمرة جزئية للزمرة  $(I, *)$

التمرين الثاني: (2.5 نقط)

ليكن  $x$  عددا صحيحا طبيعيا يحقق:  $10^x \equiv 2 \pmod{19}$

1. (أ) تحقق أن:  $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$

(ب) بين أن:  $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$

2- ليكن  $d$  القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و  $x+1$

(أ) بين أنه:  $10^d \equiv 1 \pmod{19}$

(ب) بين أن:  $d = 18$

(ج) استنتج أن:  $x \equiv 17 \pmod{18}$

## التمرين الثالث: (4 نقط)

الجزء الأول: نعتبر في المجموعة  $C$  المعطاة:  $(E) \quad z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$ 1- تحقق أن العدد  $-2i$  حل للمعادلة  $(E)$  0.52- حدد العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث: 0.5

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

3- (أ) حدد الجذرين المربعين للعدد  $5-12i$  0.5(ب) حل في  $C$  المعادلة  $(E)$  0.5

الجزء الثاني: المستوى العقدي مشوب لمعلم متعدد منظم مدائري.

نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي إحداثياتها على التوالي هي:  $a = -1+3i$  و  $b = -2i$  و  $c = 2+i$ 1- بين أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية ومتساوي الساقين في  $C$  0.52- نعتبر الدوران  $R_1$  الذي مركزه  $B$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  و الدوران  $R_2$  الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ لتكن  $M$  نقطة من المستوى العقدي نحقق  $z$  صورتها بالدوران  $R_1$  و  $M_2$  صورتها بالدوران  $R_2$ (أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران  $R_1$  هي:  $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$  0.5(ب) حدد  $z_2$  لحق  $M_2$  بدلالة  $z$  0.5(ج) استنتج أن النقطة  $I$  منتصف القطعة  $[M_1M_2]$  ثابتة. 0.5

## التمرين الرابع: (6 نقط)

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي:  $f(x) = x + \ln x$  وليكن  $(C)$  للمنحنى الممثل للدالة $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعدد منظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (نأخذ:  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$ )1- احسب النهايات التالية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$  12- (أ) ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  0.25(ب) بين أن الدالة  $f$  تقابل من المجال  $]0, +\infty[$  نحو مجال  $\mathbb{R}$  يتم تحديده، ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي  $f^{-1}$ . 0.753- لحسب  $f(1)$  و  $f(e)$  ثم أثبت:  $(C)$  و  $(C')$  منحنى الدالة  $f^{-1}$  في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  0.754- (أ) لحسب التكامل  $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$  (يمكنك وضع:  $t = f^{-1}(x)$ ) 0.5(ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين  $(C)$  و المستقيمات ذات المعادلات:  $x = e+1$  و  $x = 1$  و  $y = x$  0.5

- 5- نعتبر المعادلة :  $(E_n) : x + \ln x = n$   
 (أ) بين أن المعادلة  $(E_n)$  تقبل حلا وحيدا  $x_n$  0.25  
 (ب) حدد قيمة  $x_1$  ثم بين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  0.5  
 6- (أ) بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) f(x_n) \leq f(n)$  ثم استنتج أن :  $x_n \leq n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) 0.5  
 (ب) بين أن  $n - \ln(n) \leq x_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) 0.5  
 (ج) احسب النهايتين :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n}$  0.5

التمرين الخامس: (4 نقط)

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منظم و  $f_n$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

- 1- بين أنه من أجل  $n \geq 2$  يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha_n$  من المجال  $]0,1[$  بحيث :  $f_n(\alpha_n) = 0$  0.5

- 2- بين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  تقاسمية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. (نضع  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ ) 0.75

- 3- (أ) تحقق أنه من أجل  $t \neq 1$  لدينا :  $1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$  0.5

- (ب) استنتج أن :  $\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$  0.5

- 4- (أ) بين أن :  $1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$  0.5

- (ب) بين أن :  $0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1 - \alpha_n)}$  ( $\forall n \geq 2$ ) 0.5

- (ج) استنتج أن :  $\ell = 1 - e^{-1}$  0.75

انتهى